

## 1. Auswahlklausur 2014/2015

### 1. Aufgabe

Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl  $n$ , für die es ein Polynom

$$P(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

mit reellen Koeffizienten gibt, das die beiden folgenden Eigenschaften aufweist:

- Für  $i = 0, 1, \dots, 2n$  gilt  $2014 \leq a_i \leq 2015$ .
- Es gibt eine reelle Zahl  $\xi$  mit  $P(\xi) = 0$ .

### 2. Aufgabe

Eine positive ganze Zahl  $n$  heißt *neckisch*, wenn man sie in der Form  $n = a^b + b$  mit zwei ganzen Zahlen  $a, b \geq 2$  schreiben kann.

Man entscheide, ob es 102 aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen gibt, von denen genau 100 neckisch sind.

### 3. Aufgabe

Es sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit  $|AB| \neq |AC|$ . Die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  seien  $D$  beziehungsweise  $E$ . Die Umkreise der Dreiecke  $BCD$  und  $BCE$  mögen den Umkreis des Dreiecks  $ADE$  in  $P$  beziehungsweise  $Q$  schneiden, wobei  $P \neq D$  und  $Q \neq E$ .

Man beweise, dass  $|AP| = |AQ|$ .

**Bearbeitungszeit: 180 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» Der Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung. Träger ist Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

» **BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH**

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-0, Fax: (02 28) 9 59 15-19  
info@bildung-und-begabung.de, www.bildung-und-begabung.de | Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445  
Steuer-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695 | Bankverbindung: IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50  
BIC: COLSDE33XXX, Sparkasse KölnBonn | Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter

## 2. Auswahlklausur 2014/2015

### Aufgabe 1

Man bestimme alle Paare  $(x, y)$  ganzer Zahlen, welche die Gleichung

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1$$

erfüllen.

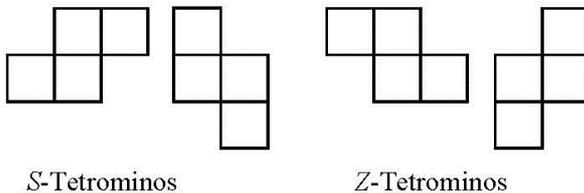
### Aufgabe 2

Es sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis  $k$  und dem Inkreismittelpunkt  $I$ . Die Orthogonale zu  $CI$  durch  $I$  schneide die Seite  $BC$  in  $U$  und  $k$  in  $V$ , wobei  $V$  und  $A$  auf verschiedenen Seiten von  $BC$  liegen. Die Parallele zu  $AI$  durch  $U$  schneide  $AV$  im Punkt  $X$ .

Man beweise: Wenn die Geraden  $XI$  und  $AI$  orthogonal zueinander sind, dann schneidet  $XI$  die Seite  $AC$  in ihrem Mittelpunkt  $M$ .

### Aufgabe 3

Aus zwei  $2 \times 1$ -Dominosteinen kann man ein *Tetromino* konstruieren, indem man die beiden Dominosteine längs ihrer längeren Seiten so aneinanderlegt, dass der Mittelpunkt der längeren Seite des einen Dominosteins ein Eckpunkt des anderen Dominosteins ist. Dabei ergeben sich zwei hinsichtlich ihrer Orientierung verschiedene Typen von Tetrominos, die wir als *S-* bzw. *Z-Tetromino* bezeichnen wollen.



Ein *Gitterpunktpolygon*  $P$  ist eine einfach zusammenhängende Fläche, deren Randlinien nur auf Gitterlinien des ebenen ganzzahligen Koordinatengitters liegen. Eine *Pflasterung* von  $P$  ist eine vollständige und überlappungsfreie Überdeckung von  $P$  mit Flächenstücken, die auch nicht teilweise außerhalb von  $P$  liegen.

Wir nehmen nun an, dass ein Gitterpunktpolygon  $P$  nur mit *S-Tetrominos* gepflastert werden kann. Man beweise: Wenn auch eine Pflasterung von  $P$  mit *S- und Z-Tetrominos* möglich ist, dann ist die Anzahl der dabei verwendeten *Z-Tetrominos* stets gerade.

**Bearbeitungszeit: 180 Minuten**

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

» Der Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung. Träger ist Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH.

» BILDUNG & BEGABUNG GEMEINNÜTZIGE GMBH

Kortrijker Straße 1, 53177 Bonn | Postfach 20 02 01, 53132 Bonn | Tel.: (02 28) 9 59 15-0, Fax: (02 28) 9 59 15-19  
 info@bildung-und-begabung.de, www.bildung-und-begabung.de | Registergericht: Amtsgericht Essen, HRB 22445  
 Steuer-Nr.: 206/5887/1089 | USt.-IDNr.: DE217481695 | Bankverbindung: IBAN: DE27 3705 0198 0029 0022 50  
 BIC: COLSDE33XXX, Sparkasse KölnBonn | Geschäftsführung: Dr. Elke Völmicke, Prof. Dr. Andreas Schlüter