1. Auswahlklausur 2013/2014

1. Aufgabe

Die Zentralbank von Sikinien prägt Münzen im Wert von 11 und 12 Kulotnik. Bei einem Einbruch haben 11 sikinische Ganoven einen Tresor geknackt und Münzen im Gesamtwert von 5940 Kulotnik erbeutet. Sie versuchen für eine Weile, die Beute gerecht unter sich aufzuteilen – also so, dass jeder gleich viel erhält – aber es will ihnen nicht gelingen; nach einer Weile behauptet ihr Anführer, sich überlegt zu haben, dass dies tatsächlich nicht möglich ist.

Man beweise, dass sie keine Münze im Wert von 12 Kulotnik erbeutet haben.

2. Aufgabe

Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit $|AD| = |BD|$. Seine Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ mögen sich in E schneiden. Der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks BCE heiße I. Der Umkreis des Dreiecks BIE schneide das Innere der Strecke $\overline{AE}$ im Punkt N.

Man beweise, dass

$$|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|\,.$$

3. Aufgabe

Es sei $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ eine monoton steigende Folge positiver ganzer Zahlen. Eine positive ganze Zahl n heißt *verlässlich*, wenn es einen positiven ganzzahligen Index i mit $n = \frac{i}{a_i}$ gibt.

Man beweise: Wenn 2013 verlässlich ist, dann ist auch 20 verlässlich.

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

2. Auswahlklausur 2013/2014

Aufgabe 1

Eine natürliche Zahl n habe die folgende Eigenschaft:
Für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_d$, die sowohl $a_1 + a_2 + \dots + a_d = 2013$ als auch $0 \le a_i \le 1$ für $i = 1, 2, \dots, d$ erfüllen, existiert eine Zerlegung der Menge dieser reeller Zahlen in n paarweise disjunkte Teilmengen (von denen einige leer sein dürfen), so dass die Summe der Zahlen in jeder Teilmenge höchstens 1 beträgt.

Man bestimme die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{Z}^+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen.

Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen m und n gilt: $m^2 + f(n) | mf(m) + n$.

(Hinweis: Das Symbol | bedeutet: „ist Teiler von".)

Aufgabe 3

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien die Innenwinkel α, β, γ wie üblich bezeichnet. Ferner seien der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von α und BC mit D sowie der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von β und AC mit E bezeichnet. Nun wird dem Viereck $ABDE$ eine Raute so einbeschrieben, dass alle Eckpunkte dieser Raute auf verschiedenen Seiten des Vierecks liegen. In dieser Raute seien die nicht-stumpfen Innenwinkel mit φ bezeichnet.

Man beweise, dass $\varphi \le \max(\alpha, \beta)$ gilt.

(Hinweis: Es wird nicht zwischen einem Winkel und seinem Maß (seiner Weite) unterschieden.)

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald