1. Auswahlklausur 2012/2013

1. Aufgabe

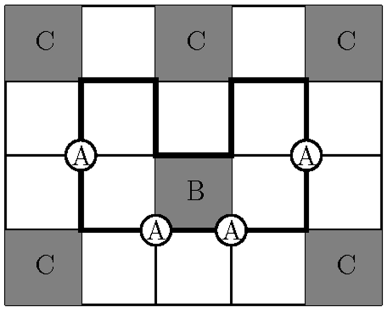
Es sei n eine ungerade natürliche Zahl und x und y seien zwei rationale Zahlen mit

$$x^n + 2y = y^n + 2x.$$

Man zeige, dass $x = y$.

2. Aufgabe

Es seien $m, n \geqslant 4$ zwei ganze Zahlen. Wir betrachten ein $m \times n$–Gitterrechtteck, das von $m+1$ horizontalen und $n+1$ vertikalen Strecken gebildet wird. Die Schnittpunkte dieser Strecken heißen *Ecken*. Es sei P ein von Selbstüberschneidungen freier, geschlossener Weg, der durch jede der $(m-1)(n-1)$ inneren Ecken aber keine der äußeren Ecken geht. Es bezeichne A die Anzahl der inneren Ecken, durch die P geradlinig hindurchgeht, B die Anzahl der Gitterquadrate, von denen P genau zwei Seiten benutzt, die sich zudem gegenüber liegen, und C die Anzahl der Gitterquadrate, von denen P keine Seite benutzt. Man beweise, dass $A = B - C + m + n - 1$.



(Die Abbildung zeigt eine Situation mit $m = 4$, $n = 5$, $A = 4$, $B = 1$ und $C = 5$.)

3. Aufgabe

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreis ω. Man beweise, dass es einen Punkt J mit der folgenden Eigenschaft gibt: Ist X ein innerer Punkt von ABC, treffen die Strahlen AX, BX und CX den Kreis ω erneut in den Punkten A_1, B_1 und C_1 und liegen die Punkte A_2, B_2 und C_2 symmetrisch zu A_1, B_1 und C_1 bezüglich der Mittelpunkte der Strecken $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ beziehungsweise $\overline{AB}$, so liegen die vier Punkte A_2, B_2, C_2 und J auf einem gemeinsamen Kreis.

2. Auswahlklausur 2012/2013

1. Aufgabe

In der Ebene liegen zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 13$ und $r_2 = 8$.
Es sei AB ein Durchmesser des größeren Kreises und BC eine seiner Sehnen, die den kleineren Kreis im Punkt D berührt.

Man berechne die Länge der Strecke AD.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

2. Aufgabe

Eine Menge A von ganzen Zahlen heißt *zulässig*, wenn sie folgende Eigenschaft hat:

Für $x, y \in A$ ($x = y$ ist erlaubt) gilt $x^2 + kxy + y^2 \in A$ für jede ganze Zahl k.

Man bestimme alle Paare m, n von Null verschiedener ganzer Zahlen, für welche die einzige zulässige Menge, die sowohl m als auch n enthält, die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzer Zahlen ist.

3. Aufgabe

Es sei n eine positive natürliche Zahl. Im Folgenden betrachten wir Paare von Elementen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die jeweils kein gemeinsames Element haben.

Man bestimme mit Beweis die größtmögliche Anzahl solcher Paare, für welche die Summen ihrer Elemente paarweise verschieden und nicht größer als n sind.
(Zum Beispiel sind $(1;9)$, $(2;7)$ und $(3;5)$ für $n = 10$ drei mögliche Paare.)

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!