1. Auswahlklausur 2011/2012

1. Aufgabe

Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl k, für die folgendes der Fall ist: Wenn Kain in solcher Weise ganze Zahlen in die Zellen eines 2011×2011–Schachbrettes schreibt, dass die 4022 Summen, die man durch Addition aller Zahlen einer Zeile oder Spalte erhalten kann, paarweise übereinstimmen, so ist es für Abel möglich, durch Abänderung der Einträge aus nur k der Zellen zu erreichen, dass diese 4022 Summen paarweise verschieden werden.

2. Aufgabe

Es sei Γ der Umkreis des bei C gleichschenkligen Dreiecks ABC. Im Inneren der Seite $\overline{BC}$ liege der Punkt M. Es gebe einen Punkt N auf dem Strahl AM, für den M zwischen A und N liegt und der $|AM| = |AC|$ erfüllt. Der Umkreis des Dreiecks CMN schneide Γ in den beiden verschiedenen Punkten C und P. Die Geraden AB und CP mögen sich in einem Punkt Q treffen. Man beweise, dass $\sphericalangle BMQ = \sphericalangle QMN$.

3. Aufgabe

Es seien a, b und c drei positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$. Man beweise, dass

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

2. Auswahlklausur 2011/2012

1. Aufgabe

Für neun verschiedene positive ganze Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_9$ betrachten wir das Polynom $P(n) = (n + d_1)(n + d_2) \cdot \ldots \cdot (n + d_9)$.

Man zeige, dass eine ganze Zahl N mit folgender Eigenschaft existiert:
Für alle ganzen Zahlen $n \geq N$ ist die Zahl $P(n)$ durch eine Primzahl größer als 20 teilbar.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft

Die Geschäftsstelle der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe wird gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung.
Sie wird bei Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH geführt.
www.bildung-und-begabung.de | Eingetragen beim Registergericht Amtsgericht Essen HRB 22445 | St.-Nr. 206/5887/1089
Geschäftsführung: PD Dr. Elke Völmicke, Heinz Rüdiger Grunewald

2. Aufgabe

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O. Ferner sei k ein Kreis mit folgenden Eigenschaften:
(1) Der Mittelpunkt K von k liegt im Inneren der Seite BC.
(2) k berührt AB in B' und AC in C'.
(3) O liegt auf dem kürzeren der beiden Bogenstücke $B'C'$ von k.

Man beweise: Der Umkreis von ABC und k schneiden einander in zwei verschiedenen Punkten.

3. Aufgabe

Es seien f und g zwei reelle Funktionen, die für jede reelle Zahl definiert sind. Ferner soll für alle reellen Zahlen x und y die Gleichung gelten:

$$g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$$

Man bestimme alle möglichen Paare (f, g).

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geo-Dreieck zugelassen!