Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2011

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Zwei Kreise Γ und Γ' mögen sich in den beiden voneinander verschiedenen Punkten A und B schneiden. Eine Gerade durch B schneide Γ und Γ' so in C bzw. D, dass B zwischen C und D liege. Eine weitere Gerade durch B schneide Γ und Γ' derart in E bzw. F, dass E zwischen B und F liege. Es möge sich ergeben, dass $|CD| = |EF|$ gelte. Das Innere der Strecke CF treffe Γ und Γ' in P bzw. Q. Weiterhin seien M und N die Mittelpunkte der C bzw. F nicht enthaltenden Bögen $\overset{\frown}{PB}$ bzw. $\overset{\frown}{BQ}$ von Γ und Γ'. Man beweise, dass CNMF ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 2

Es sei n eine positive ganze Zahl und b die größte ganze Zahl, die kleiner als

$$(\sqrt[3]{28}-3)^{-n}$$

ist. Man beweise, dass b nicht durch 6 teilbar sein kann.

Aufgabe 3

Es bezeichne $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ heißt *elastisch*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$ die Ungleichung

$$f(x) + f(y) \geq 4f(x+y)$$

gilt.

(a) Man zeige: Ist $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ elastisch und sind x, y, z positive rationale Zahlen, so ist

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 8f(x+y+z).$$

(b) Gibt es eine elastische Funktion $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ zusammen mit positiven rationalen Zahlen x, y, z, für die

$$f(x) + f(y) + f(z) < 9f(x+y+z)$$

der Fall ist?

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ ist definiert durch

$x_1 = 1$ und $x_{2k} = -x_k$, $x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k$ für alle $k \geq 1$.

Man zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ mit den Eigenschaften $BC \parallel AE$ und $\overline{AB} = \overline{AE}$. Weiter sei F ein Punkt auf der Strecke AE, so dass $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AF}$ sowie $\sphericalangle CBA = \sphericalangle FDC$ erfüllt ist. Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke CF und O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD.

Man beweise: Wenn $DM \perp MO$, dann gilt $\sphericalangle FDC = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.

Aufgabe 3

Die Ecken und Kanten eines regulären n-Ecks seien im Uhrzeigersinn jeweils so von 1 bis n nummeriert, dass die Kante Nr. i auf die Ecke Nr. i folgt ($1 \leq i \leq n$).

Nun werden die Ecken mit nichtnegativen ganzen Zahlen e_i und die Kanten mit nichtnegativen ganzen Zahlen k_i so belegt, dass gilt:

(1) Das n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ist eine Permutation des n-Tupels $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

(2) Für jedes $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$ gilt $k_i = |\, e_{i+1} - e_i \,|$, wobei $e_{n+1} = e_1$ ist.

a) Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n, $n \geq 3$, solche n-Tupel existieren, die von $(0, \ldots, 0)$ verschieden sind.

b) Man bestimme zu jeder positiven natürlichen Zahl m die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: In den n-Tupeln $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ und $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ kommen jeweils alle natürlichen Zahlen von 0 bis m vor.