Auswahlwettbewerb zur IMO 2010

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Das Viereck ABCD sei eine Raute mit spitzem Winkel bei A. Die Punkte M und N mögen so auf den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gelegen sein, dass $|DM| = |MN|$. Ferner sei P der Schnittpunkt von AC und DN sowie R der Schnittpunkt von AB und DM. Man beweise, dass $|RP| = |PD|$.

Aufgabe 2

Man beweise oder widerlege, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b und c die Ungleichung

$$3 \leq \frac{4a+b}{a+4b} + \frac{4b+c}{b+4c} + \frac{4c+a}{c+4a} < \frac{33}{4}$$

gilt.

Aufgabe 3

Man bestimme alle Paare (m,n) nicht-negativer ganzer Zahlen, die der Gleichung

$$3^m - 7^n = 2$$

genügen.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Auf einem Tisch liegen nebeneinander 2009 Karten in einer Reihe. Zunächst ist bei allen Karten die Oberseite weiß und die Unterseite schwarz. Die Karten seien von 1 bis 2009 nummeriert. Zwei Spieler A und B führend abwechselnd einen Spielzug aus, wobei A beginnt. Jeder Spielzug besteht darin, dass der Spieler eine Karte mit der Nummer k ($k<1969$) wählt, deren weiße Seite oben liegt, und anschließend die Karten mit den Nummern $k, k+1, k+2, \dots, k+40$ auf ihren Plätzen umdreht. Der letzte Spieler, der einen gültigen Spielzug machen konnte, gewinnt das Spiel.

a) Man entscheide, ob dieses Spiel notwendigerweise endet.
b) Für welchen der beiden Spieler existiert eine Gewinnstrategie?

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Sehnenviereck ABCD, dessen Diagonalen AC und BD sich im Punkt E schneiden und dessen Seiten AD und BC auf Geraden liegen, die sich im Punkt F schneiden. Die Mittelpunkte der Strecken AB und CD seien mit G bzw. H bezeichnet.

Man beweise, dass die Gerade EF in E den Kreis durch E, G und H berührt.

Aufgabe 3

Wir nennen eine natürliche Zahl n *ausgeglichen*, wenn $n=1$ gilt oder wenn n als Produkt einer geraden Anzahl von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Primfaktoren geschrieben werden kann. Zu jedem Paar (a,b) positiver ganzer Zahlen sei $P(x)=(x+a)(x+b)$.

a) Gibt es zwei verschiedene positive ganze Zahlen a und b, für die alle Zahlen $P(1), P(2), \dots, P(50)$ ausgeglichen sind?
b) Man beweise: Wenn $P(m)$, für alle positiven ganzen Zahlen m ausgeglichen ist, dann gilt $a=b$.