Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2009

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es sei $p > 7$ eine Primzahl, die bei Division durch 6 den Rest 1 lässt. Setze $m = 2^p - 1$.
Man beweise, dass $2^{m-1} - 1$ ohne Rest durch $127m$ teilbar ist.

Aufgabe 2

Das Dreieck ABC sei bei A rechtwinklig. Es bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$. Der Punkt D liege auf der Seite $\overline{AC}$ und erfülle $|AD| = |AM|$. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke AMC und BDC heiße P.
Man beweise, dass CP den bei C gelegenen Winkel des Dreiecks ABC halbiert.

Aufgabe 3

Auf einer Tafel stehe am Anfang eine positive ganze Zahl. Wenn eine Zahl x auf der Tafel steht, darf man die Zahlen $2x + 1$ und $\frac{x}{x+2}$ dazuschreiben. Irgendwann stehe auch die Zahl 2008 auf der Tafel.
Man beweise, dass sie von Anfang an dastand.

2. Auswahlklausur

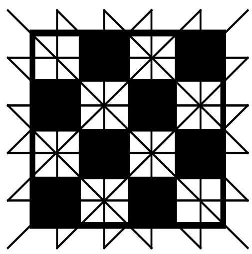
Aufgabe 1

Es sei p eine Primzahl. Weiter seien a, b, c ganze Zahlen, welche die Gleichungen $a^2 + pb = b^2 + pc = c^2 + pa$ erfüllen.
Man beweise, dass dann $a = b = c$ gilt.

Aufgabe 2

Ausgehend von einem konvexen Viereck $ABCD$ ohne ein Paar paralleler Seiten seien P und Q Punkte innerhalb $ABCD$, so dass $PQDA$ und $QPBC$ beides Sehnenvierecke sind. Wir nehmen außerdem an, dass es einen Punkt E auf der Strecke PQ mit der Eigenschaft gibt, dass $\sphericalangle PAE = \sphericalangle EDQ$ und $\sphericalangle EBP = \sphericalangle QCE$ ist.
Man beweise, dass dann $ABCD$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 3



Die 16 Felder eines 4x4-Schachbretts lassen sich wie folgt in 18 Linien ordnen: die vier Zeilen, die vier Spalten, fünf Diagonalen von Nordwest nach Südost und fünf Diagonalen von Nordost nach Südwest. Dabei bestehen diese Diagonalen aus 2, 3 oder 4 über Eck benachbarten Feldern jeweils gleicher Farbe; die Eckfelder des Schachbretts alleine bilden also keine Diagonale.
Nun wird in 10 der 16 Felder je ein Spielstein gesetzt. Jede der 18 Linien, die dann eine gerade Anzahl von Steinen enthält, zählt einen Punkt.
Welches ist die größtmögliche durch Setzen der 10 Spielsteine erreichbare Punktzahl? Die Antwort ist zu begründen.