Internationale
Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2007

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es seien n eine positive ganze Zahl größer als Eins und $B = \{1, 2, \ldots, 2^n\}$. Eine Teilmenge A von B heiße *ulkig*, wenn sie von je zwei verschiedenen Elementen x, y von B, deren Summe eine Zweierpotenz ist, genau eines enthält. Wie viele ulkige Teilmengen hat B?

Aufgabe 2

Man finde alle Quadrupel positiver ganzer Zahlen (m, n, p, q) mit der Eigenschaft

$$p^m q^n = (p+q)^2 + 1.$$

Aufgabe 3

Der Punkt P liege im Inneren des Dreiecks ABC und erfülle

$$\sphericalangle BPC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle CPA - \sphericalangle CBA = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB.$$

Man beweise, dass dann gilt:

$$\overline{PA} \cdot \overline{BC} = \overline{PB} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB}.$$

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man beweise, dass $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 2

Für ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ gilt

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle DCA = \sphericalangle EDA.$$

Der Schnittpunkt der Diagonalen BD und CE wird mit P bezeichnet.

Man beweise, dass die Gerade AP durch den Mittelpunkt der Seite CD verläuft.

Aufgabe 3

Für jede reelle Zahl x mit $0 < x < 1$ sei $y \in \left]0;1\right[$ diejenige Zahl, deren n-te Nachkommastelle die (2^n)-te Nachkommastelle von x ist.

Man beweise: Wenn x rational ist, dann ist auch y rational.