Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2006

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es seien A, B, C, D, E, F Punkte auf einem Kreis mit $AE||BD$ und $BC||DF$. Durch Spiegelung an der Geraden CE gehe der Punkt D in X über. Zeige, dass X so weit von der Geraden EF entfernt ist wie B von AC.

Aufgabe 2

In einem Raum stehen 2005 Obstkisten, von denen jede eine oder mehrere Sorten Obst enthält, von jeder Obstsorte ganzzahlig viele Früchte.

a) Man zeige, dass man stets 669 Obstkisten auswählen kann, die zusammen sowohl mindestens ein Drittel aller Äpfel als auch mindestens ein Drittel aller Birnen enthalten.

b) Können die Kisten in Teil a) stets so gewählt werden, dass sie außerdem mindestens ein Drittel aller Pfirsiche enthalten?

Aufgabe 3

Lassen sich für jede positive ganze Zahl n nicht-negative ganze Zahlen a,b,c,d,e,f,g,h mit

$$n = \frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d} \cdot \frac{2^e - 2^f}{2^g - 2^h}$$

finden? Die Antwort ist zu begründen.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man bestimme mit Beweis alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))$$

für alle positiven reellen Zahlen x, y.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB}+\overline{BC}=3\overline{AC}$. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt I und berühre die Seiten AB in D bzw. BC in E. Weiter seien K und L die Spiegelpunkte von D bzw. E bezüglich I. Man beweise, dass das Viereck $ACKL$ ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein $m \times n$-Rechteck aus mn Einheitsquadraten. Zwei seiner Einheitsquadrate heißen *benachbart*, wenn sie eine gemeinsame Seitenkante haben, und ein *Pfad* ist eine Folge von Einheitsquadraten, in der je zwei aufeinanderfolgende Elemente benachbart sind.
Jedes Einheitsquadrat des Rechtecks kann entweder weiß oder schwarz gefärbt werden. Sind alle Quadrate gefärbt, so liegt eine *Färbung* des Rechtecks vor.
Es sei N die Anzahl aller solcher Färbungen, bei denen es wenigstens einen schwarzen Pfad von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt. Ferner sei M die Anzahl aller Färbungen, bei denen es wenigstens zwei schwarze Pfade von der linken zur rechten Seitenkante des Rechtecks gibt, die kein gemeinsames Quadrat enthalten.
Man beweise, dass $N^2 \geq M \cdot 2^{mn}$.