Internationale
Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2005

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Gegeben sind die positiven reellen Zahlen a und b und die natürliche Zahl n.
Man ermittle in Abhängigkeit von a, b und n das größte der n + 1 Glieder in der Entwicklung von $(a + b)^n$.

Aufgabe 2

Sei E = { –1, 0, 1 } und M eine Menge von Gitterpunkten der Ebene. Die Punkte aus M sind so durch ein Streckennetz (S) miteinander verbunden, dass man von jedem Punkt aus M zu jedem anderen Punkt aus M gelangen kann ohne (S) zu verlassen. Dabei können die Strecken des Streckennetzes außer den Gitterpunkten auch andere Endpunkte enthalten.
Man ermittle die kürzeste Gesamtlänge des Streckennetzes, falls:
a) = { (i,j) | i, j ∈ E und i·j = 0 }
b) = { (i,j) | i, j ∈ E }

Aufgabe 3

Man beweise: Ist $4^n \cdot 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mit n, a, b, c, d ∈ N \{0}, dann kann keine der Quadratzahlen die Zahl 4^{n-1} unterschreiten.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Eine unendliche Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reeller Zahlen erfüllt die Bedingung $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ für alle $n \geq 0$, wobei a_0 und a_1 verschiedene positive Zahlen sind.
Kann diese Folge beschränkt sein? Die Antwort ist zu begründen.

(Hinweis: Eine Zahlenfolge heißt beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl *s* so gibt, dass für jedes Folgenglied a_n gilt: $|a_n| \leq s$.)

Aufgabe 2

Gegeben seien ein Kreis *K* und eine Gerade *g*, die keinen gemeinsamen Punkt haben. Ferner sei $\overline{AB}$ der Durchmesser von *K*, der orthogonal zu *g* ist, wobei *B* näher an *g* liegt als *A*. Weiter sei ein beliebiger Punkt *C*, verschieden von *A* und *B*, auf *K* gegeben. Die Gerade *AC* schneidet *g* in *D*; die Gerade *DE* berührt *K* in *E*, wobei *B* und *E* auf derselben Seite von *AC* liegen. Schließlich schneidet *BE* die Gerade *g* im Punkt *F* und *AF* den Kreis *K* außer in *A* im Punkt *G*.
Man beweise, dass der Spiegelpunkt von *G* bezüglich der Achse *AB* auf der Geraden *CF* liegt.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei positive ganze Zahlen *n* und *k*. In der Ebene liegen *n* Kreise ($n \geq 2$), so dass jeder Kreis jeden anderen zweimal schneidet und alle diese Schnittpunkte paarweise verschieden sind.
Jeder Schnittpunkt wird mit einer von *n* Farben so gefärbt, dass jede Farbe wenigstens einmal verwendet wird und auf jedem der Kreise die gleiche Anzahl *k* von Farben vertreten ist.
Man bestimme alle Werte von *n* und *k*, für die eine solche Färbung möglich ist.