Auswahlwettbewerb zur IMO 2004

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) + f(1 - \frac{1}{x}) = 1 + x$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Man ermittle eine Formel für f.

Aufgabe 2

Im Dreieck ABC ist AD ($D \in BC$) eine Seitenhalbierende, E ein Punkt auf AC und F der Schnittpunkt von BE mit AD.

Man beweise: Falls $\frac{BF}{FE} = \frac{BC}{AB} + 1$, dann ist BE eine Winkelhalbierende.

Aufgabe 3

Gegeben sind die sechs reellen Zahlen a, b, c und x, y, z so, dass

a) $0 < b - c < a < b + c$

b) $ax + by + cz = 0$

Man ermittle (mit Begründung!) das Vorzeichen von $ayz + bxz + cxy$.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

In der Ebene liegen n abgeschlossene Kreisscheiben K_1, K_2,...; K_n mit gleichem Radius r. Jeder Punkt der Ebene ist dabei in höchstens 2003 dieser Kreisscheiben enthalten.
Man beweise, dass jede Kreisscheibe K_i höchstens 14020 andere Kreisscheiben schneidet.

(Hinweis: Eine Kreisscheibe heißt abgeschlossen, wenn sie auch ihren Rand enthält.)

Aufgabe 2

Gegeben seien jeweils n reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Die Elemente einer $n \times n$-Matrix A seien folgendermaßen definiert: ($1 \le i, j \le n$)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_i + y_j \ge 0, \\ 0 & \text{wenn } x_i + y_j < 0 \end{cases}$$

Weiter sei B eine $n \times n$-Matrix mit Elementen 0 oder 1, so dass die Summe der Elemente in jeder Zeile und jeder Spalte von B gleich der Summe der Elemente in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte von A ist.
Man beweise, dass dann $A = B$ gilt.

(Hinweis: Als $n \times n$-Matrix bezeichnen wir eine quadratische Anordnung von n^2 Elementen in n Zeilen und n Spalten. Das Element im Kreuzungspunkt der i-ten Zeile und der j-ten Spalte heißt a_{ij} für $1 \le i, j \le n$.)

Aufgabe 3

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und Inkreismittelpunkt I. Ferner sei P ein Punkt im Inneren von ABC auf dem Umkreis des Dreiecks BIA. Die Parallelen zu CA und CB durch P schneiden AB in D bzw. E. Die Parallele zu AB durch P schneidet CA und CB in F bzw. G.
Man zeige, dass sich die Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.