Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2003

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Beim Schachspiel erhält der Sieger 1 Punkt und der Besiegte 0 Punkte. Bei Unentschieden (Remis) erhält jeder der Spieler ½ Punkt.
Vierzehn Schachspieler, von denen keine zwei gleich alt waren, trugen einen Wettbewerb aus, in dem jeder gegen jeden spielte. Nach Abschluss des Wettbewerbs wurde eine Rangliste erstellt. Von zwei Spielern mit gleicher Punktezahl, erhält der Jüngere eine bessere Platzierung.
Nach dem Wettbewerb stellte Jan fest, dass die drei Bestplatzierten insgesamt genau so viele Punkte erhielten wie die Gesamtzahl der Punkte der letzten neun Spieler. Jörg bemerkte dazu, dass dabei die Zahl der unentschieden ausgegangenen Spiele maximal war.
Man ermittle die Anzahl der unentschiedenen Spiele.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Dreieck ABC und ein Punkt M so, dass die Geraden MA, MB, MC die Geraden BC, CA, AB (in dieser Reihenfolge) in D, E beziehungsweise F schneiden.
Man beweise, dass es dann stets die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ aus { −1, 1 } gibt, so dass gilt:

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{MD}{AD} + \varepsilon_2 \cdot \frac{ME}{BE} + \varepsilon_3 \cdot \frac{MF}{CF} = 1$$

Aufgabe 3

Sei N eine natürliche Zahl und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ weitere natürliche Zahlen kleiner als N und so, dass das kleinste gemeinsame Vielfache von beliebigen zwei dieser n Zahlen größer als N ist.
Man beweise, dass die Summe der Kehrwerte dieser n Zahlen stets kleiner 2 ist; also

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < 2$$

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Es sei *B* ein beliebiger Punkt auf einem Kreis k_1 und es sei *A* ein von *B* verschiedener Punkt auf der Tangente an k_1 in *B*. Ferner sei *C* ein Punkt außerhalb von k_1 mit der Eigenschaft, dass die Strecke *AC* den Kreis k_1 in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Schließlich sei k_2 der Kreis, der die Gerade (*AC*) in *C* berührt und den Kreis k_1 in einem Punkt *D* berührt, welcher auf der anderen Seite von (*AC*) liegt wie *B*.
Man beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks *BCD* auf dem Umkreis des Dreiecks *ABC* liegt.

Aufgabe 3

Es sei *n* eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines $n \times n$-Schachbretts seien abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, wobei die Eckfelder schwarz sind. Ferner sei ein *Trimino* definiert als eine L-förmige Figur aus drei verbundenen Einheitsquadraten.
a) Für welche Werte von *n* ist es möglich, alle schwarzen Felder des Schachbretts durch nicht überlappende Triminos zu überdecken?
b) Welches ist bei möglicher Überdeckung die minimale Anzahl der jeweils benötigten Triminos?
Hinweis: Zwei Triminos überlappen sich, wenn sie wenigstens ein Einheitsquadrat gemeinsam bedecken.