Internationale Mathematik-Olympiade

Auswahlwettbewerb zur IMO 2002

1. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Man ermittle die Anzahl aller Zahlen der Form $x^2 + y^2$ $(x, y \in \{1, 2, 3, \ldots , 1000\})$, die durch 121 teilbar sind.

Aufgabe 2

Man beweise: Sind x, y, z die Längen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks mit dem Umfang 6, dann gilt

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq 1 .$$

Aufgabe 3

Man ermittle alle Lösungen der Gleichung $x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}$ mit $x, y \in \mathbb{N}$.

2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Es sei P die Menge aller geordneter Paare (p,q) von nichtnegativen ganzen Zahlen.
Man bestimme alle Funktionen $f: P \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(p,q)=\begin{cases} 0 & \text{wenn } pq=0 \\ 1+\frac{1}{2}f(p+1,q-1)+\frac{1}{2}f(p-1,q+1) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 2

In ein spitzwinkliges Dreieck *ABC* wird ein Quadrat mit Mittelpunkt A_1 so einbeschrieben, dass zwei Ecken auf *BC* und je eine auf *AB* bzw. *AC* liegen. Analog sind die Quadrate mit den Mittelpunkten B_1 bzw. C_1 definiert.

Man beweise, dass die Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Aufgabe 3

Man beweise, dass es keine positive ganze Zahl *n* mit der folgenden Eigenschaft gibt:
Für $k=1,2,\ldots,9$ ist die – in dezimaler Schreibweise – linke Ziffer von $(n+k)!$ gleich *k*.