Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2022

1. Auswahlklausur Beispiellösungen ¨ Stand: 31. Dezember 2021

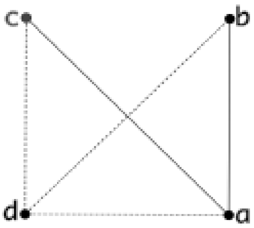
Aufgabe 1. Der größte gemeinsame Teiler zweier positiver ganzer Zahlen m und n sei mit $\mathrm{ggT}(m,n)$ bezeichnet.

Es sei eine unendliche Menge S positiver ganzer Zahlen gegeben, sodass es vier paarweise verschiedene Zahlen $v,w,x,y \in S$ gibt, für die $\mathrm{ggT}(v,w) \neq \mathrm{ggT}(x,y)$ gilt.

Beweisen Sie, dass es drei paarweise verschiedene Zahlen $a,b,c \in S$ gibt, für die $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a,c) \neq \mathrm{ggT}(b,c)$ gilt.

Erste Lösung. Im folgenden nennen wir eine dreielementige Teilmenge $\{s,t,u\} \subset S$ ein ausgewogenes Dreieck, falls die Menge $\{\mathrm{ggT}(s,t), \mathrm{ggT}(s,u), \mathrm{ggT}(t,u)\}$ genau zwei verschiedene Elemente hat. Es ist zu zeigen, dass es ein ausgewogenes Dreieck gibt.

Lemma. Für paarweise verschiedene Zahlen $a,b,c,d \in S$, sodass $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a,c) \neq \mathrm{ggT}(a,d)$ und $\mathrm{ggT}(b,d) = \mathrm{ggT}(c,d)$ gilt, enthält die Menge $\{a,b,c,d\}$ ein ausgewogenes Dreieck.
Beweis. Falls $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,d)$, dann ist $\{a,b,d\}$ ein ausgewogenes Dreieck. Ansonsten gilt entweder $\mathrm{ggT}(a,d) \neq \mathrm{ggT}(a,b)$ oder $\mathrm{ggT}(a,d) \neq \mathrm{ggT}(b,d)$, also ist $\{a,b,c\}$ oder $\{b,c,d\}$ ein ausgewogenes Dreieck.



Für jedes Element $a \in S$ sei $S_a = \{\mathrm{ggT}(a,s) \mid s \in S, s \neq a\}$. Da diese Menge nur Teiler von a enthält, ist sie endlich. Aus der Voraussetzung folgt, dass wir $a \in S$ so wählen können, dass S_a mindestens zwei Elemente enthält, da ansonsten $\mathrm{ggT}(v,w) = \mathrm{ggT}(w,x) = \mathrm{ggT}(x,y)$ gelten würde.

Nach dem Schubfachprinzip finden wir eine unendliche Teilmenge $T \subset S$, sodass $\mathrm{ggT}(a,t)$ der gleiche Wert g ist für alle $t \in T$. Nun wählen wir ein $d \in S \backslash (T \cup \{a\})$ sodass $\mathrm{ggT}(a,d) \neq g$, das wegen $|S_a| > 1$ existieren muss. Da auch S_d endlich ist, finden wir nach dem Schubfachprinzip zwei verschiedene Elemente $b,c \in T$ sodass $\mathrm{ggT}(b,d) = \mathrm{ggT}(c,d)$ gilt. Dann erfüllen a,b,c,d die Voraussetzungen des Lemmas, also existiert in der Tat ein ausgewogenes Dreieck. □

Zweite Lösung. Wir dürfen o.B.d.A. voraussetzen, dass keine ganze Zahl $g > 1$ alle Zahlen aus S teilt, da wir sonst die größte derartige Zahl g wählen und S durch die Menge $S' = \{s/g \mid s \in S\}$ ersetzen könnten: Falls die Behauptung für S' gilt, dann auch für S.

Angenommen für eine Primzahl p wäre die Teilmenge $S_p \subset S$ aller durch p teilbaren Zahlen unendlich groß, dann wählen wir $a \in S \backslash S_p$, was wegen der Vorüberlegung möglich ist. Da die Zahlen $\mathrm{ggT}(a, s)$ für $s \in S_p$ Teiler von c sind, gibt es nach dem Schubfachprinzip verschiedene $b, c \in S_p$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, c)$. Da b, c beide durch p teilbar sind, folgt auch $\mathrm{ggT}(b, c) \neq \mathrm{ggT}(a, c)$, also die Behauptung.

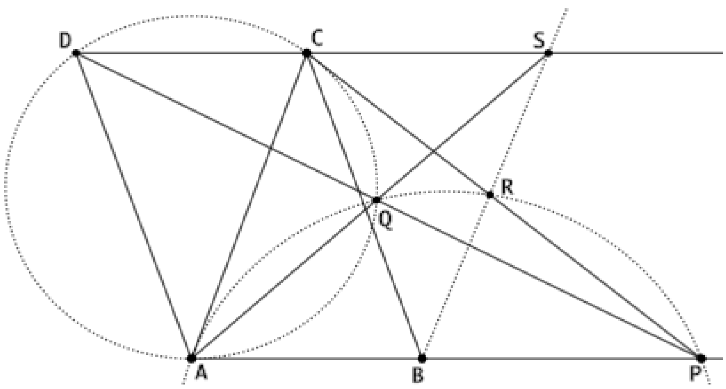
Somit dürfen wir annehmen, dass jede Primzahl nur endlich viele Elemente aus S teilt. Wegen der Voraussetzung finden wir nun aber Zahlen $b, c \in S$, die nicht teilerfremd sind. Es gibt nur endlich viele Primzahlen, die b oder c teilen, also enthält S auch nur endlich viele Elemente, die nicht zu b oder c teilerfremd sind. Somit können wir wegen $|S| = \infty$ ein Element $a \in S$ wählen, dass zu b und c teilerfremd ist. Dann erfüllen a, b, c die Behauptung. $\square$

Anmerkung: Es ist möglich, beliebig große *endliche* Mengen konstruieren, sodass die entsprechende Aussage nicht gilt, z.B. indem man für verschiedene Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ mit Produkt $N = p_1 \cdots p_r$ die Menge $S = \{N/p_i \mid i = 1, \ldots, r\}$ wählt. Dann sind $\mathrm{ggT}(x, y), x, y \in S$ alle verschieden, also gilt die Voraussetzung, aber nicht die Behauptung aus der Aufgabe.

Aufgabe 2. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $|AC| = |BC|$. Ein Punkt P sei auf dem Strahl AB gewählt, sodass B zwischen A und P liegt. Der Umkreis des Dreiecks ACD und die Strecke PD haben außer dem Punkt D noch den Punkt Q gemeinsam. Der Umkreis des Dreiecks APQ und die Strecke PC haben außer dem Punkt P noch den Punkt R gemeinsam.

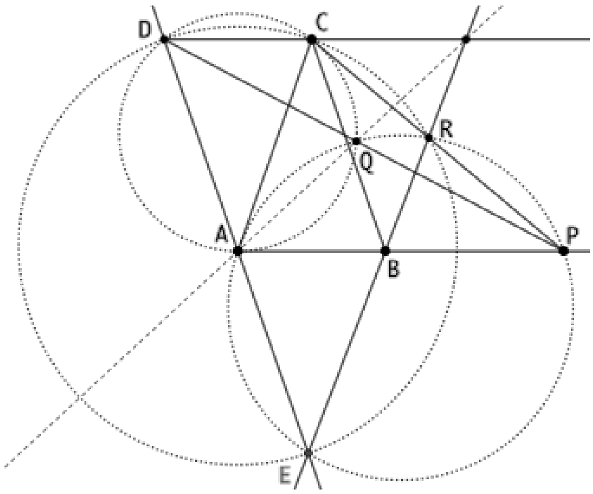
Beweisen Sie, dass sich die drei Geraden CD, AQ und BR in einem Punkt schneiden.

Erste Lösung. Wir arbeiteten mit gerichteten Winkeln modulo 180 Grad. Zunächst erkennen wir, dass aus der Voraussetzung $|AC| = |BC|$ unmittelbar folgt, dass die Winkel $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle DCA$ und $\angle ADC$ allesamt gleich groß sind.



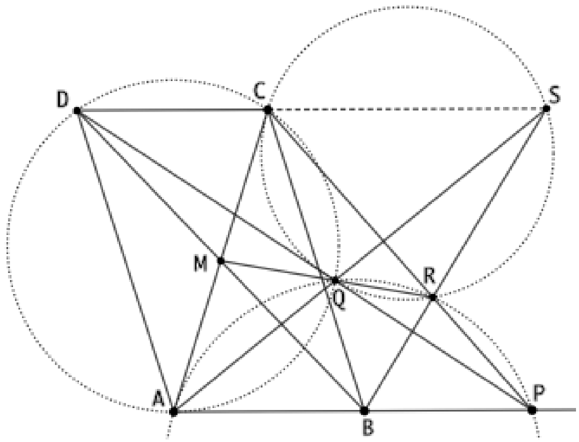
Es genügt zu zeigen, dass der Schnittpunkt S der Geraden AQ und CD auf der Geraden BR liegt. Wegen $\angle CSQ = \angle PAQ = \angle CRQ$ ist $CSRQ$ ein Sehnenviereck. Wegen $\angle CRA = 180° - \angle ARP = 180° - \angle AQP = \angle DQA = \angle DCA = \angle CBA$ ist auch $ABRC$ ein Sehnenviereck. Also gilt $\angle SRC = \angle SQC = \angle ADC = \angle BAC = \angle BRP$, woraus in der Tat folgt, dass P, R und S auf einer Geraden liegen. $\square$

Zweite Lösung. Wie in der ersten Lösung zeigt man, dass $ABRC$ ein Sehnenviereck ist. Wir betrachten den Schnittpunkt E der Geraden AD und BR. Dann gilt $\angle EAP = \angle CBA = \angle BAC = \angle ERP$, also liegt E auf dem Umkreis des Sehnenvierecks $APRQ$.



Nun gilt $\angle CER = \angle APR = 180° - \angle DCR$, also liegt E auch auf dem Umkreis des Dreiecks RCD. Die paarweisen Potenzgeraden der Umkreise von ACD, APR und RCD sind somit die Geraden CD, AQ, $RE = RB$, also schneiden sie sich in einem Punkt. Dies impliziert die Behauptung. □

Dritte Lösung. Da $\angle QAC = \angle QDC = \angle QPA$ folgt mit der Umkehrung des Sehnen-Tangenten-Winkel-Satzes, dass die Gerade AC den Umkreis des Sehnenvierecks $APRQ$ tangiert. Wegen der Voraussetzung tangiert AB auch den Umkreis des Sehnenvierecks $AQCD$, also sind die Winkel $\angle ADQ$ und $\angle PAQ$ gleich groß. Damit folgt aber $\angle ACQ = \angle ADQ = \angle PAQ = \angle CRQ$, also tangiert AC auch den Umkreis des Dreiecks CQR.



Der Schnittpunkt M der Geraden RQ und AC erfüllt damit nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $|MA|^2 = |MQ| \cdot |MR| = |MC|^2$, also ist M der Mittelpunkt der Strecke AC, also auch der Mittelpunkt der Strecke BD.

Der Satz von Pappos, angewandt auf die jeweils kollinearen Punkte A, B, P und R, Q, M impliziert nun, dass der Schnittpunkt S der Geraden AQ und BR, C (als Schnittpunkt der Geraden AM und PR), sowie D (als Schnittpunkt der Geraden BM und PQ) auf einer Geraden liegen, was der zu zeigenden Aussage entspricht. □

Aufgabe 3. Bestimmen Sie[1] den kleinsten Wert, den der Ausdruck

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2022}}{2022} \right\rfloor$$

annehmen kann, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_{2022} \geq 1$ reelle Zahlen sind, sodass $|a_i - a_j| \geq 1$ für alle $1 \leq i < j \leq 2022$ gilt.

Anmerkung: Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$, genannt *Gauß-Klammer* von x, die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Lösung. Aus der Voraussetzung folgt, dass die kleinste der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ mindestens 1, die zweitkleinste mindestens 2 ist, usw. bis zur 2022-ten, die mindestens 2022 sein muss. Wenn wir nun die Zahlen $a_1, \ldots, a_{2022}$ sukzessive der Größe nach durch $1, 2, \ldots, 2022$ ersetzen, so wird die Summe aus dem Aufgabentext nicht größer. Wir sehen also, dass wir uns auf den Fall einschränken dürfen, dass $(a_1, a_1, \ldots, a_{2022})$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen sind. Nun ersetzen wir 2022 durch eine beliebige positive ganze Zahl k und behaupten, dass der kleinste Wert $s(k)$, den die Summe

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor$$

annehmen kann, wenn $a_1, a_1, \ldots, a_k$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen sind, genau $\lfloor \log_2(k) \rfloor$ beträgt.

• Untere Schranke: Da m offenbar monoton steigend ist, genügt es zu zeigen, dass $m(2^t) \geq t$ gilt. Der Fall $t = 0$ ist klar, für $t > 0$ verwenden wir vollständige Induktion und setzen daher $m(2^{t-1}) \geq t - 1$ als bekannt voraus. Es seien $a_1, a_1, \ldots, a_{2^t}$ beliebige paarweise verschiedene positive ganze Zahlen. Dann ist das Maximum a_i dieser Zahlen mindestens 2^t. Falls $i > 2^{t-1}$, so gilt nun

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2^t}}{2^t} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2^{t-1}}}{2^{t-1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor \geq m(2^{t-1}) + 1 = t - 1 + 1 = t$$

Falls jedoch $i \leq 2^{t-1}$, so ist die Menge $X = \{1, 2, \ldots, 2^{t-1}\} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{2^{t-1}}\}$ nicht leer. Sei $b \in X$ beliebig. Dann gilt $a_i \geq 2^t = 2^{t-1} + 2^{t-1} \geq b + i$, also gilt

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2^t}}{2^t} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{b+i}{i} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2^{t-1}}}{2^{t-1}} \right\rfloor + \geq m(2^{t-1}) + 1 = t - 1 + 1 = t$$

• Obere Schranke: Wir setzen

$$a_i = \begin{cases} i - 1, \text{ falls } i \text{ keine Zweierpotenz ist,} \\ 2^{s+1} - 1, \text{ falls } i = 2^s. \end{cases}$$

Dann sind $a_1, a_2, \ldots, a_k$ paarweise verschiedene positive ganze Zahlen und es gilt

$$\left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor = \begin{cases} 0, \text{, falls } i \text{ keine Zweierpotenz ist,} \\ 1 \text{ andernfalls.} \end{cases}$$

also folgt $\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_k}{k} \right\rfloor = \lfloor \log_2(k) \rfloor$.

Angewandt auf die konkrete Situation der Aufgabenstellung erhalten wir, dass der kleinste Wert, den die angegebene Summe annehmen kann, gleich $\lfloor \log_2(2022) \rfloor = 11$ ist. □

[1] Mit Beweis.

Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2022

Beispiellösungen und Hinweise zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Für eine feste positive ganze Zahl m sei A eine Teilmenge von $\{0,1,2,\ldots,5^m\}$, die aus $4m+$ Elementen besteht.
Beweisen Sie, dass es in A stets drei Zahlen a,b,c gibt, für die $a<b<c$ und $c+2a>3b$ gil

Erste Lösung:
Wir nehmen an, dass es $4m+2$ Elemente $x_0<x_1<\ldots<x_{4m+1}$ aus $\{0,1,2,\ldots,5^m\}$ gibt, für welche die Behauptung nicht erfüllt ist. Dann gilt insbesondere $x_{4m+1}+2x_i\le 3x_{i+1}$ für alle $i=0,1,\ldots,4m-1$. Umformen ergibt $x_{4m+1}-x_i\ge \frac{3}{2}(x_{4m+1}-x_{i+1})$.
Ein einfacher Induktionsschluss liefert daraus $x_{4m+1}-x_i\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{4m-i}(x_{4m+1}-x_{4m})$.
Hier führt nun $i=0$ auf $x_{4m+1}-x_0\ge\left(\frac{3}{2}\right)^{4m}(x_{4m+1}-x_{4m})=\left(\frac{81}{16}\right)^m(x_{4m+1}-x_{4m})>5^m\cdot 1$,
Widerspruch! □

Zweite Lösung:
Wir bezeichnen das größte Element von A mit c. Für $k=0,\ldots,4m-1$ definieren wir
$A_k=\left\{x\in A \,\middle|\, (1-\left(\frac{2}{3}\right)^k)c\le x<(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1})c\right\}$.
Wegen $(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{4m})c=c-\left(\frac{16}{81}\right)^m c>c-\left(\frac{1}{5}\right)^m c\ge c-1$ bilden die Mengen $A_0,A_1,\ldots,A_{4m-1}$ eine Zerlegung von $A\setminus\{c\}$. Weil $A\setminus\{c\}$ aus $4m+1$ Elementen besteht, muss nach dem Schubfachprinzip eine Menge A_k existieren, die aus wenigstens zwei Elementen besteht. Wi bezeichnen zwei der Zahlen aus A_k so mit a und b, dass $a<b<c$ gilt. Dann ist
$c+2a\ge c+2(1-\left(\frac{2}{3}\right)^k)c=(3-2\left(\frac{2}{3}\right)^k)c=3(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1})c>3b$, wie verlangt. □

Hinweise: Offensichtlich lässt sich in der Behauptung die Mächtigkeit von A nicht auf $4m+$ verkleinern, wie für $m=1$ das Beispiel $A=\{0,2,3,4,5\}$ zeigt. Ein gelegentlich auftretender Fehler bestand darin, die Elemente von A zu manipulieren oder zu ersetzen, ohne dabei zu überprüfen, ob die daraus gezogenen Schlussfolgerungen für die ursprüngliche Menge A gültig sind.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die es ein Paar (a,b) von positiven ganzen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

i) Keine dritte Potenz einer Primzahl teilt a^2+b+3.

ii) Es gilt $\dfrac{ab+3b+8}{a^2+b+3}=n$.

Antwort: Die einzige ganze Zahl mit diesen Eigenschaften ist $n=2$.

Erste Lösung:
Es sei p ein beliebiger Primfaktor von a^2+b+3 (ein solcher existiert, weil $a^2+b+3 \geq 5$ gilt). Dann ist $b \equiv -a^2-3 \bmod p$. Wegen der Ganzzahligkeit von n muss p aber auch ein Primfaktor von $ab+3b+8$ sein. Somit gilt
$0 \equiv ab+3b+8 \equiv a(-a^2-3)+3(-a^2-3)+8 \equiv -a^3-3a^2-3a-1 \equiv -(a+1)^3 \bmod p$,
also muss p auch ein Primfaktor von $a+1$ sein.
Wegen *i)* kann p in a^2+b+3 höchstens quadratisch vorkommen, also höchstens doppelt so oft wie in $a+1$. Weil das für jeden Primfaktor gilt, erhalten wir $a^2+b+3 \leq (a+1)^2$. Würde ein Primfaktor p in a^2+b+3 dagegen höchstens einfach vorkommen, so hätten wir
$a^2+b+3 \leq \dfrac{(a+1)^2}{p} \leq \dfrac{(a+1)^2}{2}$, im Widerspruch zu $\dfrac{(a+1)^2}{2} \leq a^2+1 < a^2+4 \leq a^2+b+3$.
Also muss $a^2+b+3=(a+1)^2$ gelten. Folglich ist $b=2a-2$ und damit
$ab+3b+8=a(2a-2)+3(2a-2)+8=2a^2+4a+2=2(a+1)^2$.
Somit ist $n=2$ die einzige mögliche Lösung. Das Beispiel $(a,b)=(2,2)$ mit $a^2+b+3=9$ zeigt, dass $n=2$ tatsächlich eine Lösung ist. □

Zweite Lösung:

Wenn wir die Bedingung *ii)* nach b auflösen, erhalten wir $b=\dfrac{na^2+3n-8}{a+3-n}$. (1)

<u>Fall 1:</u> $n=a+3$. Hier muss wegen $b \in \mathbb{Z}^+$ auch der Zähler verschwinden, was nach Einsetzen $(a+1)^3=0$, also $a=-1$ liefert – ein Widerspruch zu $a \in \mathbb{Z}^+$.
<u>Fall 2:</u> $n \neq a+3$. Aus (1) folgt

$$a^2+b+3=a^2+\frac{na^2+3n-8}{a+3-n}+3=\frac{a^3+3a^2-na^2+na^2+3n-8+3a+9-3n}{a+3-n}=\frac{(a+1)^3}{a+3-n}. \quad (2)$$

Nun bezeichnen wir mit $v_p(z)$ die Häufigkeit, mit der ein Primfaktor p in der Zahl $z \in \mathbb{Z}^+$ vorkommt. Gäbe es einen Primfaktor p mit $v_p(a+1) \geq v_p(a+3-n)+1$, dann wäre nach (2) $v_p(a^2+b+3) \geq 2v_p(a+3-n)+3 \geq 3$, was im Widerspruch zu *i)* steht. Also ist $v_p(a+1) \leq v_p(a+3-n)$, und somit ist $a+1$ ein Teiler von $a+3-n$. Aus (2) folgt noch $a+3-n>0$ und daher $a+1 \leq a+3-n$, also $n \leq 2$.
Für $n=1$ wäre dann $a+1 \mid a+2$, was für kein $a \in \mathbb{Z}^+$ erfüllt ist. Also kann nur $n=2$ gelten, was mit dem Beispiel aus der ersten Lösung bestätigt wird. □

Hinweise: In der zweiten Lösung ist der Nachweis von $n<a+3$ unbedingt erforderlich.

Aufgabe 3

Für eine feste positive ganze Zahl k sei K die Menge aller Gitterpunkte (x, y) in der Ebene, deren beide Koordinaten x und y nichtnegative ganze Zahlen kleiner als $2k$ sind. Es gilt also $|K| = 4k^2$.

Eine Menge V bestehe nun aus k^2 nicht-ausgearteten Vierecken mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Ecken aller dieser Vierecke sind Elemente von K.

ii) Jeder Punkt in K ist Eckpunkt von genau einem der Vierecke in V.

Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert, den die Summe der Flächeninhalte aller k^2 Vierecke in V annehmen kann.

Antwort: Der größtmögliche Wert der Flächensumme beträgt $S(k) := \frac{1}{3}k^2(2k+1)(2k-1)$.

Bezeichnungen: Der Flächeninhalt eines Polygons X sei mit $[X]$ bezeichnet. Ein Viereck heiße *legal*, wenn alle seine Eckpunkte zu K gehören. Weiter sei $O = (k-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})$ der Mittelpunkt von K. Ein legales Viereck heiße *zentral*, wenn es punktsymmetrisch mit O als Mittelpunkt ist. Jede Menge V von Vierecken, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, heiße *akzeptabel*. Für jede akzeptable Menge V sei die Flächensumme ihrer Vierecke mit $S(V)$ bezeichnet.

Erste Lösung:

Jeder Punkt aus K ist Eckpunkt eines eindeutig definierten zentralen Quadrats. Daher ist die Menge Q aller zentralen Quadrate akzeptabel. Wir zeigen $S(V) \leq S(Q) = S(k)$ (1), woraus die Antwort folgt.

Wir benutzen das folgende

Lemma 1. Für jedes Viereck $V = A_1A_2A_3A_4$ und jeden beliebigen Punkt O in der Ebene gilt

$$[V] \leq \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} OA_i^2 \qquad (2),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn V ein Quadrat mit Mittelpunkt O ist.

Beweis: Für $i = 1,\dots,4$ und $A_5 = A_1$ gilt $[OA_iA_{i+1}] \leq \dfrac{OA_i \cdot OA_{i+1}}{2} \leq \dfrac{OA_i^2 + OA_{i+1}^2}{4}$. Daher gilt

$[V] \leq \sum_{i=1}^{4}[OA_iA_{i+1}] \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(OA_i^2 + OA_{i+1}^2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} OA_i^2$, womit (2) bewiesen ist. In der Tat herrscht jeweils Gleichheit, wenn V ein Quadrat mit Mittelpunkt O ist. ■

Nun betrachten wir eine beliebige akzeptable Menge V. Lemma 1 auf jedes Element von V und jedes Element von Q angewendet liefert $S(V) \leq \frac{1}{2}\sum_{A\in K} OA^2 = S(Q)$, womit die linke Seite von (1) bewiesen ist.

Nun berechnen wir $S(Q) = \frac{1}{2}\sum_{A\in K} OA^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2k-1}\sum_{j=0}^{2k-1}\left((k-\frac{1}{2}-i)^2 + (k-\frac{1}{2}-j)^2\right)$

$$= \tfrac{1}{8}\cdot 4\cdot 2k\sum_{i=0}^{k-1}(2k-2i-1)^2 = k\sum_{j=0}^{k-1}(2j+1)^2 = k\left(\sum_{j=1}^{2k} j^2 - \sum_{j=1}^{k}(2j)^2\right)$$

$$= k\left(\frac{2k(2k+1)(4k+1)}{6} - 4\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right) = \frac{k^2(2k+1)(2k-1)}{3} = S(k). \ \square$$

Zweite Lösung:
Für jedes Viereck $ABCD$ in einer akzeptablen Menge V gilt

$$[ABCD] = \frac{AC \cdot BD}{2} \cdot \sin\varphi \le \frac{AC^2 + BD^2}{4} \qquad (3),$$

mit $\varphi = \measuredangle(AC, BD)$. Wenden wir (3) auf alle Elemente von V an, so erhalten wir

$S(V) \le \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2k^2} A_iB_i^2$, wobei $(A_1, A_2, ..., A_{2k^2}, B_1, B_2, ..., B_{2k^2})$ eine Permutation von K ist.

Mit der Abkürzung $S := \sum_{i=1}^{2k^2} A_iB_i^2$ formulieren wir das folgende

Lemma 2. Der größtmögliche Wert von S über alle Permutationen von K beträgt $\frac{4}{3}k^2(4k^2-1)$ und wird angenommen, wenn A_i und B_i für alle $i = 1, 2, ..., 2k^2$ symmetrisch zu O liegen.

Beweis: Es seien $A_i = (p_i, q_i)$ und $B_i = (r_i, s_i)$ für $i = 1, 2, ..., 2k^2$. Dann ist $S = \sum_{i=1}^{2k^2}(p_i - r_i)^2 + \sum_{i=1}^{2k^2}(q_i - s_i)^2$. Mit der QM-AM-Ungleichung schätzen wir die erste Summe ab: $\sum_{i=1}^{2k^2}(p_i - r_i)^2 = \sum_{i=1}^{2k^2}\left(2p_i^2 + 2r_i^2 - (p_i + r_i)^2\right) = 4k\sum_{j=0}^{2k-1} j^2 - \sum_{i=1}^{2k^2}(p_i + r_i)^2$

$$\le 4k\sum_{j=0}^{2k-1} j^2 - \frac{1}{2k^2}\left(\sum_{i=1}^{2k^2}(p_i + r_i)\right)^2 = 4k\sum_{j=0}^{2k-1} j^2 - \frac{1}{2k^2}\left(2k \cdot \sum_{j=0}^{2k-1} j\right)^2$$

$= 4k \cdot \frac{2k(2k-1)(4k-1)}{6} - 2k^2(2k-1)^2 = \frac{2k^2(2k-1)(2k+1)}{3}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $p_i + r_i = 2k-1$ für alle i erfüllt ist. Da die zweite Summe völlig analog abgeschätzt werden kann, folgt $S \le \frac{4}{3}k^2(4k^2-1)$ mit Gleichheit bei $p_i + r_i = q_i + s_i = 2k-1$ für alle $i = 1, ..., 2k^2$, d.h. wenn A_i und B_i für alle $i = 1, 2, ..., 2k^2$ symmetrisch zu O liegen. ∎

Mit dem Resultat aus Lemma 2 ergibt sich $S(V) \le \frac{1}{4} \cdot \frac{4k^2(4k^2-1)}{3} = \frac{k^2(2k-1)(2k+1)}{3}$,
wobei die Abschätzung für die Menge Q scharf ist. □

Hinweise:
Das häufig behauptete Ergebnis $S(k) = k^4$ ist falsch, weil es nicht auf der maximalen Konfiguration beruht und nur für $k = 1$ den korrekten Wert liefert. Die Formel von Pick ist bei dieser Aufgabe nicht zielführend, weil in der maximalen Konfiguration nicht alle Vierecke hinsichtlich der Aufteilung zwischen Rand- und inneren Gitterpunkten optimiert sind.
Der größtmögliche Wert der Flächensumme bleibt derselbe, wenn man in der Aufgabenstellung „Vierecke“ durch „Vielecke“ ersetzt.