BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2022

1. Auswahlklausur (24. November 2021)

Aufgabe 1. Der größte gemeinsame Teiler zweier positiver ganzer Zahlen m und n sei mit $\text{ggT}(m, n)$ bezeichnet.

Es sei eine unendliche Menge S positiver ganzer Zahlen gegeben, sodass es vier paarweise verschiedene Zahlen $v, w, x, y \in S$ gibt, für die $\text{ggT}(v, w) \neq \text{ggT}(x, y)$ gilt.

Beweisen Sie, dass es drei paarweise verschiedene Zahlen $a, b, c \in S$ gibt, für die $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, c) \neq \text{ggT}(b, c)$ gilt.

Aufgabe 2. Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $|AC| = |BC|$. Ein Punkt P sei auf dem Strahl AB gewählt, sodass B zwischen A und P liegt. Der Umkreis des Dreiecks ACD und die Strecke PD haben außer dem Punkt D noch den Punkt Q gemeinsam. Der Umkreis des Dreiecks APQ und die Strecke PC haben außer dem Punkt P noch den Punkt R gemeinsam.

Beweisen Sie, dass sich die drei Geraden CD, AQ und BR in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie[1] den kleinsten Wert, den der Ausdruck

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a_{2022}}{2022} \right\rfloor$$

annehmen kann, wobei $a_1, a_2, \ldots, a_{2022} \geq 1$ reelle Zahlen sind, sodass $|a_i - a_j| \geq 1$ für alle $1 \leq i < j \leq 2022$ gilt.

Anmerkung: Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$, genannt *Gauß-Klammer* von x, die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geodreieck zugelassen! Bitte schreiben Sie grundsätzlich auf Blätter im Format DIN A4. Alle Blätter sollen mit Namen und Vornamen versehen und durchnummeriert sein. Vermerken Sie auf dem ersten Blatt der Klausur bitte zusätzlich Ihr Geburtsdatum und die derzeitige Klassenstufe.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Viel Erfolg!

[1] Mit Beweis.

Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2022

2. Auswahlklausur 30. November 2021

Aufgabe 1

Für eine feste positive ganze Zahl m sei A eine Teilmenge von $\{0, 1, 2, \ldots, 5^m\}$, die aus $4m+2$ Elementen besteht.
Beweisen Sie, dass es in A stets drei Zahlen a, b, c gibt, für die $a < b < c$ und $c + 2a > 3b$ gilt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für die es ein Paar (a, b) von positiven ganzen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

i) Keine dritte Potenz einer Primzahl teilt $a^2 + b + 3$.

ii) Es gilt $\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n$.

Aufgabe 3

Für eine feste positive ganze Zahl k sei K die Menge aller Gitterpunkte (x, y) in der Ebene, deren beide Koordinaten x und y nichtnegative ganze Zahlen kleiner als $2k$ sind. Es gilt also $|K| = 4k^2$.

Eine Menge V bestehe nun aus k^2 nicht-ausgearteten Vierecken mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Ecken aller dieser Vierecke sind Elemente von K.

ii) Jeder Punkt in K ist Eckpunkt von genau einem der Vierecke in V.

Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert, den die Summe der Flächeninhalte aller k^2 Vierecke in V annehmen kann.

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geodreieck zugelassen!
Bitte schreiben Sie grundsätzlich auf Blätter im Format DIN A4. Alle Blätter sollen mit Namen und Vornamen versehen und durchnummeriert sein. Vermerken Sie auf dem ersten Blatt jeder Klausur bitte zusätzlich Ihr Geburtsdatum und die derzeitige Klassenstufe.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Viel Erfolg!