Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2021

1.Auswahlklausur Beispiellosungen (17. Dezember 2020)

Aufgabe 1. Die Ecken eines regelmäßigen 100-Ecks P seien so entweder rot oder blau gefärbt, dass jede Farbe mindestens 24-mal vorkommt.

Beweisen Sie, dass es 24 paarweise disjunkte Vierecke $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{24}$ gibt, deren Eckpunkte auch Ecken von P sind, sodass jedes Viereck Q_i entweder einen oder drei rote Eckpunkte hat.

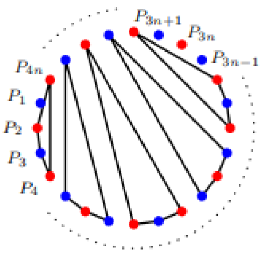
Lösung. Wir zeigen per Induktion nach n die folgende Aussage:

> *Wenn die Ecken eines konvexen $4n$-Ecks P so rot und blau gefärbt wurden, dass jede Farbe mindestens $(n-1)$-mal vorkommt, finden wir $(n-1)$ paarweise disjunkte Vierecke $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, deren Ecken auch Ecken von P sind.*

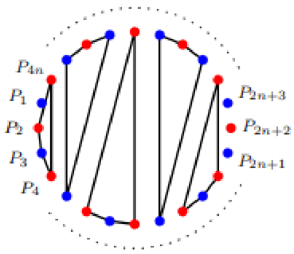
Für $n = 25$ erhalten wir die Behauptung aus der Aufgabenstellung.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n \geqslant 2$ und o.B.d.A. gebe es mindestens $2n$ rote Ecken. Der Fall, dass die Ecken alternierend oder 2-alternierend gefärbt sind, wird unten behandelt. Ansonsten muss es vier aufeinanderfolgende Ecken geben, unter denen nicht zwei rote und zwei blaue sind. Dann gibt es auch vier aufeinanderfolgende Ecken, unter denen mehr rote als blaue sind, denn andernfalls gäbe es weniger rote als blaue Ecken. Wähle solche vier Ecken aus: Wenn genau drei von ihnen rot sind, wählen wir das von den vier ausgewählten Ecken aufgespannte Viereck als Q_{n-1}. Die restlichen $4(n-1)$ Punkte bilden ein konvexes $4(n-1)$-Eck P', das zu Q_{n-1} disjunkt ist und auf das wir die Induktionsannahme anwenden können. Wenn hingegen alle vier der gewählten Ecken rot sind, gehen wir den Rand des $4n$-Ecks entlang bis wir zum ersten Mal auf einen der mindestens $n - 1 > 0$ blauen Punkte treffen und wenden das gleiche Argument wie im vorherigen Fall an.

Es bleiben noch die Fälle, dass die Ecken alternierend oder 2-alternierend gefärbt sind. Dafür gibt es verschiedene Konstruktionen. Wir betrachten zuerst den alternierenden Fall und bezeichnen die Ecken von P mit $P_1, P_2, \ldots, P_{4n}$, wobei o.B.d.A. P_1 blau sei. In diesem Fall gibt es (mindestens) zwei Konstruktionen (siehe folgende Skizzen).



Variante 1



Variante 2

In Variante 1 beginnen wir mit dem Viereck $P_2P_3P_4P_{4n}$ und gehen dann von P_4 aus gegen den Uhrzeigersinn in Dreierschritten und von P_{4n} aus im Uhrzeigersinn in Einerschritten weiter. Dabei bleiben genau wobei von jedem $a \in V$ genau eine Kante ausgeht, die in demjenigen eindeutig bestimmten $b \in V$ endet, sodass $b \equiv a^2 + 1 \pmod p$ gilt. Man macht sich leicht klar, dass zwei verschiedene Inseln p-Landiens genau dann durch eine Brücke verbunden sind, wenn es die entsprechenden Zahlen in G_p durch eine gerichtete Kante miteinander verbunden sind (egal in welcher Richtung). Die zu zeigende Behauptung ist also äquivalent dazu, dass G_p als einfacher Graph, d.h. nach Vergessen der Orientierungen der Kanten und Weglassen von Schleifen[1], nicht zusammenhängend ist.

Da jeder zusammenhängende einfache Graph mit p Ecken mindestens $p-1$ Kanten haben muss, genügt es dafür zu zeigen, dass mindestens zwei der p Kanten von G_p Schleifen waren. Dazu können wir laut der Annahme an p zunächst eine ganze Zahl n finden, sodass $p \mid n^2 - n + 1$. O.B.d.A. dürfen wir sogar $n \in V$ annehmen. Dann gibt es in G_p eine Kante, die von n nach n führt. Wegen $n' = p - n + 1 \in V$ und

$$(n')^2 - n' + 1 \equiv (1-n)^2 - (1-n) + 1 \equiv 1 - 2n + n^2 - 1 - n + 1 \equiv n^2 - n + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

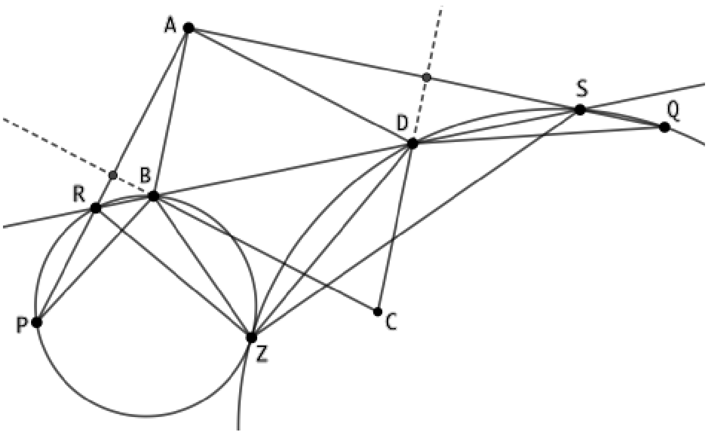
liegt auch an der Ecke n' eine Schleife.

Um den Beweis zu beenden müssen wir noch nachweisen, dass $n \neq n'$ gilt. Falls doch $n' = n$, dann würde auch $p = 2n - 1$ gelten, und damit wäre $4n^2 - 4n + 1$ durch p teilbar. Da aber auch $4n^2 - 4n + 4$ durch p teilbar ist, folgt schon $p = 3$, was wir oben ausgeschlossen haben. □

Aufgabe 3. Es sei $ABCD$ ein konvexes Parallelogramm, das bei A spitzwinklig ist. Die Spiegelpunkte von A an den Geraden BC und CD seien mit P bzw. Q bezeichnet. Außerdem schneidet die Gerade BD die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$ im Inneren in den Punkten R bzw. S.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der Dreiecke BRP und DQS berühren.

Lösung. Wir betrachten den Spiegelpunkt Z von A bei Spiegelung an BD. Wir werden beweisen, dass sich die beiden in der Aufgabenstellung erwähnten Kreise in Z berühren.



Zunächst ist wegen $\measuredangle BZR = \measuredangle RAB = \measuredangle BPR$ und der Umkrehrung des Peripheriewinkelsatzes klar, dass Z auf dem Umkreis ω_1 von BRP liegt. Analog zeigt man, dass Z auch auf dem Umkreis ω_2 von DQS liegt. Der Sehnen-Tangentenwinkel der Sehne ZB von ω_1 ist $\measuredangle ZRB = \measuredangle BRA$. Da AR auf BC und damit auch auf AD senkrecht steht, hat dieser Winkel die Größe $90^\circ - \measuredangle ADB$. Analog zeigt man, dass der Sehnen-Tangentenwinkel der Sehne ZD von ω_2 gleich $90^\circ - \measuredangle DBA$ ist. Die Summe dieser beiden Winkel beträgt nun $180^\circ - \measuredangle ADB - \measuredangle DBA = \measuredangle BAD = \measuredangle DZB$, was zeigt, dass die Tangenten an ω_1 und ω_2 im Punkt Z übereinstimmen. Somit berühren sich beide Kreise wirklich. □

[1] So werden Kanten bezeichnet, die im gleichen Eckpunkt beginnen und enden.

Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2021

Beispiellösungen und Hinweise zur 2. Auswahlklausur

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass es für jede beliebige nichtnegative ganze Zahl z genau ein geordnetes Paar (m,n) positiver ganzer Zahlen m, n gibt, so dass $2z=(m+n)^2-m-3n$ (1) gilt.

Erste Lösung:
Umformen von (1) ergibt $2z=(m+n-1)^2+m-n-1=2m-2+(m+n-1)(m+n-1-1)$, woraus $z+1=m+\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}$ folgt. Wir setzen $m+n-1=k$ und erhalten $z+1=m+\frac{k(k-1)}{2}$ (2), wobei $0<m\le k$ und $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge 1$ gilt. Außerdem ist $\frac{k(k-1)}{2}\in\mathbb{Z}$.
Offensichtlich gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl $z+1$ genau ein k mit
$\frac{k(k-1)}{2}<z+1\le\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{(k+1)k}{2}$.
Dann sind auch $m=z+1-\frac{k(k-1)}{2}$ und $n=k+1-m$ eindeutig bestimmte positive ganze Zahlen, so dass (2) eine eindeutige Darstellung jeder positiven ganzen Zahl $z+1$ und damit jeder nichtnegativen ganzen Zahl z durch m und n liefert. □

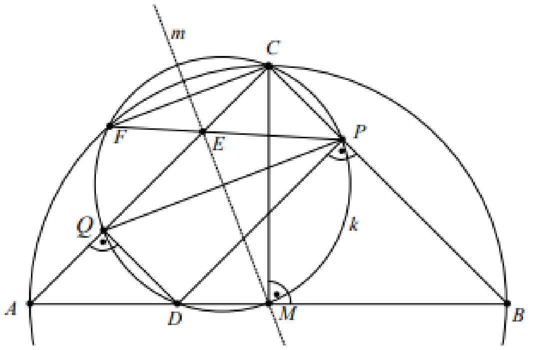
Zweite Lösung:
Umformen von (1) ergibt $2z=(m+n)(m+n-1)-2n$. Wir bemerken, dass die rechte Seite stets gerade ist und setzen $m+n=k$. Für konstantes k ($k\ge 2$) kann n die Werte $1,2,\ldots,k-1$ annehmen, so dass die rechte Seite jeweils verschiedene gerade Zahlen von $k(k-1)-2$ bis $k(k-1)-2(k-1)=(k-1)(k-2)$ liefert. Für $k=2,3,\ldots$ entsteht so eine vollständige, disjunkte Zerlegung der Menge aller nichtnegativer gerader ganzer Zahlen. Die Zahl $2z$ liegt daher in genau einem durch k bestimmten Intervall an einer durch n bestimmten Stelle, womit dafür auch m eindeutig bestimmt ist. □

Hinweise: Der Beweis lässt sich auch mit vollständiger Induktion führen. Das Auftauchen der Dreieckszahlen $\frac{k(k-1)}{2}$ erlaubt eine schöne geometrische Darstellung der verschiedenen Intervalle, in denen $2z$ liegen kann.

Aufgabe 2

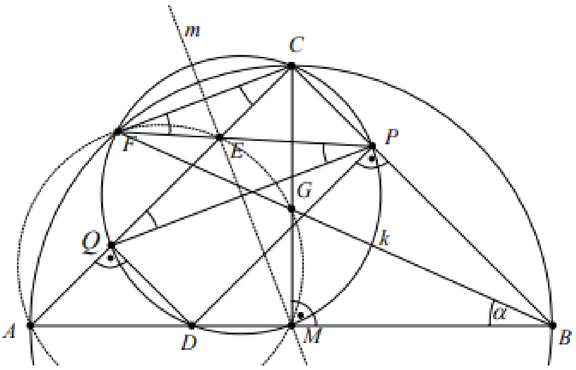
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{BC}=\overline{CA}$ sei D ein Punkt im Inneren der Seite AB, für den $\overline{AD}<\overline{DB}$ gilt. Weiter seien P und Q zwei Punkte im Inneren der Seiten BC bzw. CA, so dass $\angle DPB=\angle AQD=90°$ gilt. Die Mittelsenkrechte von PQ schneide CQ im Punkt E, und die Umkreise der Dreiecke ABC und QPC schneiden sich außer in C in einem weiteren Punkt F.
Beweisen Sie: Wenn P, E und F kollinear sind, dann gilt $\angle ACB=90°$.

Erste Lösung:
Wir bezeichnen die Mittelsenkrechte der Strecke PQ mit m und den Kreis $QPCF$ mit k. Wegen $DP \perp BC$ und $DQ \perp AC$ liegt auch D auf k und CD ist sogar Durchmesser von k. Die Strecken QE und PE liegen symmetrisch zu m; gleichzeitig ist m auch Symmetrieachse von k. Daher sind die Sehnen CQ und FP symmetrisch zu m, also auch C und F (nach Voraussetzung sind P, E und F kollinear!). Somit stimmt die Mittelsenkrechte von CF mit m überein; es folgt, dass m durch den Umkreismittelpunkt O von ABC verläuft.



Nun betrachten wir den Mittelpunkt M der Strecke AB. Wegen $CM \perp DM$ liegt M auch auf k. Wegen $\angle ACM = \angle MCB$ folgt aus dem Umfangswinkelsatz, dass die Sehnen MP und MQ von k gleich lang sind. Damit ist aber gezeigt, dass m durch M verläuft. Da sowohl O als auch M auf m und auf CM liegen, folgt $O = M$ und damit $\angle ACB = 90°$. □

Zweite Lösung:
Wie in der ersten Lösung ausgeführt, stellen wir fest, dass die Punkte P, C, F, Q, D und der Mittelpunkt M von AB auf dem Kreis k mit Durchmesser CD liegen, und dass die Mittelsenkrechte m von PQ durch M verläuft.



Es sei G der Schnittpunkt von BF und CM und wir bezeichnen $\alpha = \angle FBA$. Weil E auf m liegt, weil P, E und F kollinear sind, und weil $CFAB$ und $CFQP$ Sehnenvierecke sind, folgt
$\angle PQC = \angle PQE = \angle EPQ = \angle FPQ = \angle FCQ = \angle FCA = \angle FBA = \alpha$.
Weiter gilt $\angle FEM = \angle FEQ + \angle QEM = 2\alpha + (90° - \alpha) = 90° + \alpha$. Ebenfalls mit Außenwinkeln gilt $\angle FGM = 90° + \alpha$; daher ist $MGEF$ ein Sehnenviereck.
Es folgt $\angle CGE = \angle MFE = \angle MFP = \angle MCP$. Also ist $GE \parallel BC$ und damit erhalten wir $\angle EAF = \angle CAF = \angle CBF = \angle EGF$, so dass $GEFA$ ebenfalls ein Sehnenviereck ist.
Daraus folgt $\angle ACB = \angle AFB = \angle AFG = 180° - \angle GMA = 90°$, was zu zeigen war. □

Hinweise: Es gilt auch die Umkehrung der zu beweisenden Aussage; daher ist auf die Unterscheidung von Voraussetzung und Behauptung zu achten, um Zirkelschlüsse zu vermeiden. Ein Beweis mit Strahlensatz ist ebenfalls möglich, dagegen führten Ansätze mit Drehstreckung („spiral similarity“) nicht zum Ziel.

Aufgabe 3

Wir betrachten alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d, für die $(a+c)(b+d)=ac+bd$ gilt. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $S=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ annehmen kann.

Erste Lösung:
Der kleinste mögliche Wert für S ist 8.
Um zu zeigen, dass stets $S\geq 8$ gilt, wenden wir zweimal die AM-GM-Ungleichung an:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right)\geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}=\frac{2(ac+bd)}{\sqrt{abcd}}=\frac{2(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}\geq 2\cdot\frac{2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bd}}{\sqrt{abcd}}=8.$$

An den Stellen der Ungleichungen gilt Gleichheit, wenn $a=c$ und $b=d$ ist. Damit lässt sich $(a+c)(b+d)=ac+bd$ umschreiben als $4ab=a^2+b^2$. Auflösen nach a liefert $a=b(2\pm\sqrt{3})$ und damit eine mögliche Lösung $S=8$ für $b=d=1$ und $a=c=2+\sqrt{3}$.

Zweite Lösung:
Die Verschiebung $(a,b,c,d)\to(b,c,d,a)$ ändert weder den Wert von S noch die Nebenbedingung. Daher können wir oBdA $ac\geq bd$ annehmen und setzen $t=\sqrt{\frac{ac}{bd}}$ mit $t\geq 1$.

Aus der Bedingung folgt $t^2+1=\frac{ac+bd}{bd}=(a+c)(\frac{1}{d}+\frac{1}{b})\geq 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{bd}}=4t$, wobei im vorletzten Schritt die AM-GM-Ungleichung verwendet wurde. Also gilt $t^2-4t+1\geq 0$ und daher $(t\geq 2+\sqrt{3}\vee t\leq 2-\sqrt{3})$, was wegen $t\geq 1$ auf $t\geq 2+\sqrt{3}$ führt.

Es ist $S=(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+(\frac{b}{c}+\frac{d}{a})\geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}=2(t+\frac{1}{t})$. Durch Ableiten sehen wir, dass für alle $t\geq 2+\sqrt{3}$ gilt: $S'(t)=2-2/t^2\geq 0$. Daher hat S an der Stelle $t=2+\sqrt{3}$ ein Minimum und es folgt $S\geq 2(t+\frac{1}{t})\geq 2(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}})=2(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})=8$.

Für $(a,b,c,d)=(1,2+\sqrt{3},1,2+\sqrt{3})$ ist sowohl
$(a+c)(b+d)=8+4\sqrt{3}=1\cdot 1+(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=ac+bd$ als auch

$$S=\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{1}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=8.$$

Daher ist 8 der kleinste Wert von S. □

Hinweise: Weitere Lösungen erreicht man über die Homogenität von S und der Nebenbedingung, die es erlaubt, etwa $abcd=1$ oder $a=1$ oder $a+b+c+d=1$ zu setzen.
Nicht erlaubt sind jedoch Annahmen wie etwa $a\geq b\geq c\geq d$ oder andere, aus nicht gegebenen „Symmetriegründen" erschlossene Einschränkungen.
Auch mit der klassischen Methode zur Behandlung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen, nämlich mit Lagrange-Multiplikatoren, ist eine, wenn auch aufwändige, Lösung dieser Aufgabe möglich.