Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2021

1.Auswahlklausur (25. November 2020)

Aufgabe 1. Die Ecken eines regelmäßigen 100-Ecks P seien so entweder rot oder blau gefärbt, dass jede Farbe mindestens 24-mal vorkommt.

Beweisen Sie, dass es 24 paarweise disjunkte Vierecke $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{24}$ gibt, deren Eckpunkte auch Ecken von P sind, sodass jedes Viereck Q_i entweder einen oder drei rote Eckpunkte hat.

Aufgabe 2. Für jede Primzahl p besteht das Königreich p-Landien aus p Inseln, die mit den Zahlen $1, 2, \ldots, p$ durchnummeriert sind. Zwei verschiedene Inseln, die die Nummern m und n tagen, sind genau dann durch eine Brücke verbunden, wenn die Zahl $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$ durch p teilbar ist.

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, sodass man nicht entlang von Brücken allein von jeder Insel p-Landiens zu jeder anderen gelangen kann.

(Zwei Brücken, die sich aus der Luft gesehen kreuzen, erlauben keinen Zielwechsel.)

Aufgabe 3. Es sei $ABCD$ ein konvexes Parallelogramm, das bei A spitzwinklig ist. Die Spiegelpunkte von A an den Geraden BC und CD seien mit P bzw. Q bezeichnet. Außerdem schneidet die Gerade BD die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$ im Inneren in den Punkten R bzw. S.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der Dreiecke BRP und DQS berühren.

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geodreieck zugelassen! Bitte schreiben Sie grundsätzlich auf Blätter im Format DIN A4. Alle Blätter sollen mit Namen und Vornamen versehen und durchnummeriert sein. Vermerken Sie auf dem ersten Blatt der Klausur bitte zusätzlich Ihr Geburtsdatum und die derzeitige Klassenstufe.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Viel Erfolg!

BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade 2021
2. Auswahlklausur (1. Dezember 2020)

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass es für jede beliebige nichtnegative ganze Zahl z genau ein geordnetes Paar (m,n) positiver ganzer Zahlen m, n gibt, so dass $2z=(m+n)^2-m-3n$ gilt.

Aufgabe 2

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{BC}=\overline{CA}$ sei D ein Punkt im Inneren der Seite AB, für den $\overline{AD}<\overline{DB}$ gilt. Weiter seien P und Q zwei Punkte im Inneren der Seiten BC bzw. CA, so dass $\angle DPB=\angle AQD=90°$ gilt. Die Mittelsenkrechte von PQ schneide CQ im Punkt E, und die Umkreise der Dreiecke ABC und QPC schneiden sich außer in C in einem weiteren Punkt F.
Beweisen Sie: Wenn P, E und F kollinear sind, dann gilt $\angle ACB=90°$.

Aufgabe 3

Wir betrachten alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d, für die $(a+c)(b+d)=ac+bd$ gilt. Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den $S=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ annehmen kann.

Als Hilfsmittel sind nur Schreibzeug, Zirkel und Geodreieck zugelassen!
Bitte schreiben Sie grundsätzlich auf Blätter im Format DIN A4. Alle Blätter sollen mit Namen und Vornamen versehen und durchnummeriert sein. Vermerken Sie auf dem ersten Blatt jeder Klausur bitte zusätzlich Ihr Geburtsdatum und die derzeitige Klassenstufe.

Bearbeitungszeit: 240 Minuten

Viel Erfolg!